DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2019.02.016

三维不可压 Boussinesq 方程组的正则性准则*

郭香香[1]，郭聪冲[2]
（1. 暨南大学信息科学技术学院，广东 广州 510632；
2. 龙岩学院数学与信息工程学院，福建 龙岩 364012）

摘　要：主要考虑三维不可压 Boussinesq 方程组的正则性准则。证明了当速度场的部分分量满足 $\int_0^{T^*} \| u_i \|^p_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}(\mathbf{R}^3)} \mathrm{d}s < \infty, p \in (2,\infty), i = 1,2,3$ 时，局部解可以连续延拓到端点。这一结果改进和发展了三维不可压 Boussinesq 方程组的正则性准则，是正则性理论的一个补充。

关键词：三维不可压 Boussinesq 方程组；速度场分量；正则性准则
中图分类号：O175.29　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2019）02－0128－07

The regularity criteria to the three-dimensional incompressible Boussinesq equations

GUO Xiangxiang[1], *GUO Congchong*[2]
(1. College of Information Science and Technology, Jinan University, Guangzhou 510632, China;
2. College of Mathematics and Information Engineering, Longyan University, Longyan 364012, China)

Abstract: The regularity criteria of the three-dimensional incompressible Boussinesq equations are mainly considered. It is proven that if one component of the velocity field satisfies $\int_0^{T^*} \| u_i \|^p_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}(\mathbf{R}^3)} \mathrm{d}s < \infty$, $p \in (2,\infty), i = 1,2,3$ to the Boussinesq equations, the local solution can be continuously extended to the endpoint. This result improves and develops some known regularity criteria of the three-dimensional incompressible Boussinesq equations, which is a supplement to the regularity theory.

Key words: the three-dimensional incompressible Boussinesq equations; one component of the velocity field; regularity criteria

考虑三维不可压 Boussinesq 方程组：

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u + \nabla P = \theta e_3, \\ \theta_t + (u \cdot \nabla)\theta - \kappa \Delta \theta = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ (u,\theta)|_{t=0} = (u_0, \theta_0), \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}^3, t > 0 \tag{1}$$

其中 $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ 表示速度场，$P = P(x,t)$ 是压强，$\theta = \theta(x,t)$ 是温度，$\nu > 0$ 是动粘度，$\kappa > 0$ 是热扩散系数，$e_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$，本文令 $\nu = \kappa = 1$。

注意到当 $\theta \equiv 0$ 时，方程组（1）退化为不可压 Navier-Stokes（简记为 N-S）方程组。三维不可压

* 收稿日期：2018－10－11
基金项目：国家自然科学基金（11471126）；福建省教育厅中青年项目（JAT170576）；龙岩学院博士科研启动（LB2016002）
作者简介：郭香香（1993 年生），女；研究方向：偏微分方程；E-mail：xiangxiangguo123@stu2016.jnu.edu.cn
通信作者：郭聪冲（1985 年生），男；研究方向：偏微分方程；E-mail：guocongchong77@163.com

N-S 方程组光滑解的整体存在性或光滑解在有限时间内爆破的问题是千禧年七大问题之一。这个问题的主要困难是理解三维不可压流体涡旋拉伸的影响(二维不可压 N-S 方程组涡旋守恒)。为了更好的理解三维不可压流体的涡旋拉伸作用，学者们提出了各种简化模型，其中 Boussinesq 方程组是常用的模型之一，它不仅与三维不可压流体有着相似的涡旋拉伸效果，而且在大气科学和地球物理应用中发挥着重要的作用。所以该方程组被来自不同领域的学者们广泛研究，并且对它的研究是有物理背景和意义的。

N-S 方程组有一系列的研究，参见文献［1－4］等。在讨论 Boussinesq 方程组之前，我们先回忆一下三维 N-S 方程组取得的进展。Prodi 等给出了当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时，若 Leray-Hopf 弱解 $u \in L^q(0,T;L^p(\mathbf{R}^3))$ 满足

$$\frac{3}{p}+\frac{2}{q} \leqslant 1, \quad 3<p \leqslant \infty$$

则弱解是唯一的。临界情况 $\frac{3}{p}+\frac{2}{q}=1$ 是由 Escauriaza 等[5]证明，特别需要指出的是临界情况的空间 $u \in L^q(0,T;L^p(\mathbf{R}^3))$ 是尺度不变的，这一特性揭示了流体的基本物理特征。最近，Chemin 等[6]证明了三维不可压 N-S 方程组在临界空间的正则性问题，即如果速度场满足 $\int_0^{T^*}\|u_i\|^p_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}(\mathbf{R}^3)}\mathrm{d}s<\infty, p \in(4,6), i=1,2,3$，则局部强解可延拓到端点 T^*。随后，Chemin 等[6]的工作被 Chemin 等[7]和 Han 等[8]分别延拓到 $p \geqslant 4$ 和 $p \geqslant 2$。

下面具体讨论 Boussinesq 方程组。对于二维 Boussinesq 方程组，$\nu,\kappa>0$ 时的全局时间正则解已证。$\nu=0,\kappa>0$ 或 $\nu>0,\kappa=0$ 的部分粘性整体正则性由许多学者们做了一系列的工作[9－11]，Xu[12]证明了具有分数阶扩散项的二维 Boussinesq 方程组解的存在性，唯一性和正则性。然而，对于三维 Boussinesq 方程组，$\nu,\kappa=0$ 时奇点的正则性是流体力学中的一个公开问题[13－15]，因此考虑三维 Boussinesq 方程组解的正则性是一个比较有意义的问题。期间 Fan 等[16]和 Ishimura 等[17]分别提出了以下爆破准则：

$$\omega=\operatorname{curl} u \in L^1(0,T;B^0_{\infty,\infty}(\mathbf{R}^3)) \tag{2}$$

$$\nabla u \in L^1(0,T;L^\infty(\mathbf{R}^3)) \tag{3}$$

之后，Qiu 等[18]证明了三维不可压 Boussinesq 方程组的 Serrin 准则。更多关于 Boussinesq 方程组相关的成果请参见文献［19－20］等。

由于不可压 Boussinesq 方程组与不可压 N-S 方程组有着相同的非线性对流结构，受文献［6－8］工作的启发，本文给出了当三维不可压 Boussinesq 方程组的速度场部分分量满足 $\int_0^{T^*}\|u_i\|^p_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}(\mathbf{R}^3)}\mathrm{d}s<\infty, p \in(2,\infty), i=1,2,3$ 时解的正则性准则。这一结果改进和发展了三维不可压 Boussinesq 方程组现有的正则性准则，是正则性理论的一个补充。

在阐述本文的主要结果之前，我们给出以下记号：

$$\nabla=(\partial_1,\partial_2,\partial_3), \nabla_h=(\partial_1,\partial_2)$$

和

$$u_h=(u_1,u_2), \omega=\partial_1 u_2-\partial_2 u_1$$

对任意的 $s \in \mathbf{R}$，$1 \leqslant q<\infty$，记半范：$\|f\|_{\dot{W}^{s,q}} := \||\nabla|^s f\|_{L^q}$，特别地，记 $\dot{W}^{s,2} := \dot{H}^s$。为简化记号，使用爱因斯坦记号：在 k 上的求和总是从 1 到 3，而在 h 或 $\tilde{h}$ 上的求和总是从 1 到 2。另外，使用 $\|\cdot\|_{L^p}$ 来表示 $\|\cdot\|_{L^p(\mathbf{R}^3)}$。

本文的主要定理如下：

定理 1　设 $0<T^*<\infty$，$(u_0,\theta_0) \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}$，$(u,\theta)$ 是方程组 (1) 在 $[0,T^*)$ 上的局部解，满足

$$(u,\theta) \in C([0,T^*);\dot{H}^{\frac{1}{2}}) \cap L^2([0,T^*);\dot{H}^{\frac{3}{2}})$$

且

$$\int_0^{T^*}\|u_i\|^p_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}(\mathbf{R}^3)}\mathrm{d}s<\infty$$

其中 $p \in(2,\infty)$，$i=1,2,3$

则 (u,θ) 可连续延拓到端点 T^*。

1　预备知识

在本文证明的过程中，我们将对速度场分别作水平方向和垂直方向的分解。为此，先给出一些预备知识。

定理 2　记 $\nabla_h^\perp=(-\partial_2,\partial_1)$，$\Delta_h=\partial_1^2+\partial_2^2$ 和 $\omega=\partial_1 u_2-\partial_2 u_1$，则

$$u_h=(u_1,u_2)=\nabla_h^\perp \Delta_h^{-1}\omega-\nabla_h \Delta_h^{-1}\partial_3 u_3 \tag{4}$$

$$\omega_t-\Delta\omega+(u\cdot\nabla)\omega=\partial_3 u_3 \omega-\nabla_h^\perp \cdot u_3 \partial_3 u_h \tag{5}$$

定理 3　(Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式) 设 j,m 是任意正整数，满足 $0 \leqslant j<m$，令 $q \leqslant q_1,q_2 \leqslant \infty$ 和 $s \geqslant 1$，$\frac{j}{m} \leqslant a \leqslant 1$，使得

$$\frac{1}{s}-\frac{j}{n}=a\left(\frac{1}{q_2}-\frac{m}{n}\right)+(1-a)\frac{1}{q_1} \tag{6}$$

则对任意 $u\in \dot{W}^{m,q_2}(\mathbf{R}^n)\cap L^{q_1}(\mathbf{R}^n)$，存在一个正常数 C，有

$$\|\nabla^j u\|_{L^s(\mathbf{R}^n)}\leqslant C\|\nabla^m u\|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)}^{a}\|u\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}^{1-a} \tag{7}$$

接着回顾齐次 Littlewood-Paley 分解的相关理论。

定义 1 设 $\varphi_0\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 是一个径向函数，满足 $0\leqslant\varphi_0\leqslant 1$；当 $|\xi|\leqslant 1$，$\varphi_0(\xi)=1$；当 $|\xi|\geqslant\frac{7}{6}$，$\varphi_0(\xi)=0$

令 $\varphi(\xi)=\varphi_0(\xi)-\varphi_0(2\xi)$ 在 $\frac{1}{2}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{7}{6}$ 上有界。对任意 $f\in\zeta(\mathbf{R}^n)$，$j\in\mathbf{Z}$，定义

$$\widehat{(P_{\leqslant j}f)}(\xi)=\varphi_0(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi),\xi\in\mathbf{R}^n;$$

$$\widehat{(Pf)}(\xi)=\varphi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi),\xi\in\mathbf{R}^n;$$

$P_{>j}=I-P_{\leqslant j}$，其中 I 是单位算子；

$P_{[a,b]}=\sum\limits_{a\leqslant j\leqslant b}P_j$，其中 $-\infty<a<b<\infty$

为方便使用，简记：$f_j=P_jf$，$f_{\leqslant j}=P_{\leqslant j}f$，$f_{a\leqslant\cdot\leqslant b}=\sum\limits_{j=a}^{b}f_j$。又由 φ 支集的性质，当 $|j-j'|>1$，有 $P_jP_{j'}=0$。

进一步，我们给出仿积分解引理[8]。

引理 1 对任意的 $f,g,h\in\zeta(\mathbf{R}^n)$，可得

$$\int_{\mathbf{R}^3}fgh\,\mathrm{d}x=\sum_j\int_{\mathbf{R}^3}f_jg_{[j-3,j+3]}h_{[j-10,j+5]}+f_jg_{[j-3,j+3]}h_{<j-10}+f_jg_{<j-3}h_{[j-2,j+2]}+f_{<j-3}g_jh_{[j-2,j+2]}\mathrm{d}x$$

为证明主要定理，我们还需给出 (u,θ) 的 H^1 估计。

定理 4 设 $(u,\theta)\in L^\infty(0,T;\dot{H}^{\frac{1}{2}})\cap L^2(0,T;\dot{H}^{\frac{3}{2}})$ 为方程组 (1) 的局部解，$\omega=\partial_1u_2-\partial_2u_1$，则存在正常数 C，使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|u\|_{H^1}+\|\theta\|_{H^1})\leqslant \exp\{C(1+\int_0^T\|u_3\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}^{p}\mathrm{d}s+\int_0^T\|\omega\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}^{p}\mathrm{d}s)\} \tag{8}$$

证明 由标准的能量不等式，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2)+\|\Delta u\|_{L^2}^2+\|\Delta\theta\|_{L^2}^2=-\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_ku\cdot\nabla)u\cdot\partial_ku\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k\theta e_3)\cdot\partial_ku\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_ku\cdot\nabla)\theta\cdot\partial_k\theta\mathrm{d}x:=\sum_{i=1}^{3}I_i$$

先估计 I_1 项。因为

$$I_1=\int_{\mathbf{R}^3}\partial_ku_3\partial_3u\cdot\partial_ku\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}\partial_ku_h\partial_hu_3\partial_ku_3\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}\partial_ku_h\partial_hu_{\bar h}\partial_ku_{\bar h}\mathrm{d}x:=\sum_{i=1}^{3}K_i$$

对 K_1,K_2 项，使用 Hölder 不等式和插值不等式。当 $2<p\leqslant 4$ 时，可得

$$|K_1|+|K_2|\leqslant C\|\nabla u_3\|_{L^{\frac{3p}{2p-2}}}\|\nabla u\|_{L^{\frac{6p}{p+2}}}^{2}\leqslant C\|u_3\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{2}{p}}\|\Delta u\|_{L^2}^{2-\frac{2}{p}} \tag{9}$$

和当 $4<p<\infty$ 时，有

$$|K_1|+|K_2|\leqslant C\||\nabla|^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}\nabla u_3\|_{L^2}\cdot\||\nabla|^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p}}(\nabla u\cdot\nabla u)\|_{L^2}\leqslant C\|u_3\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{2}{p}}\|\Delta u\|_{L^2}^{2-\frac{2}{p}} \tag{10}$$

对 K_3 项，由于 $\partial_hu_{\bar h}=\mathscr{R}_2(\omega)+\mathscr{R}_2(\partial_3u_3)$，其中 $\mathscr{R}_2$ 是二维 Riesz 算子，类似式 (9)、式 (10) 处理，有

$$|K_3|\leqslant C(\|u_3\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}+\|\omega\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}})\cdot\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{2}{p}}\|\Delta u\|_{L^2}^{2-\frac{2}{p}} \tag{11}$$

然后，I_2 项的界可简单估计为

$$|I_2|\leqslant C\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla\theta\|_{L^2}\leqslant C(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2) \tag{12}$$

最后，估计 I_3 项。由于

$$I_3=\int_{\mathbf{R}^3}\partial_ku_3\partial_3\theta\cdot\partial_k\theta\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}\partial_ku_h\partial_h\theta\cdot\partial_k\theta\mathrm{d}x:=I_{31}+I_{32}$$

其中 I_{31} 项可类似 K_1,K_2 项处理。下面计算 I_{32} 项。由最值原理和方程组 (1) 的第二个方程以及第三个方程，可得：$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)}\leqslant C$。对 I_{32} 项分部积分，有

$$|I_{32}|\leqslant C\|\theta\|_{L^\infty}\cdot(\|\nabla u\|_{L^2}\|\Delta\theta\|_{L^2}+\|\Delta u\|_{L^2}\|\nabla\theta\|_{L^2}) \tag{13}$$

综上得 $I_i(i=1,2,3)$ 的界，并利用 Gronwall 不等式，定理得证。

2 主要结果

为更好的证明本文的主要定理，在此之前，我们先证明两个非常重要的定理。

2.1 水平方向项的估计

由定理 4 可知，我们需要估计 $\int_0^T\|\omega\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}^{p}\mathrm{d}s$

的界。当 $2 < p \leqslant 4$，即 $-\frac{1}{2} + \frac{2}{p} \geqslant 0$ 时，有

$$\int_0^T \| \omega \|_{\dot H^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}^p \mathrm{d}s \leqslant$$

$$C\int_0^T \| \omega \|_{L^r}^{(3-\frac{3}{r}-\frac{2}{p})p} \| \nabla\omega \|_{L^r}^{(\frac{2}{p}+\frac{3}{r}-2)p} \mathrm{d}s$$

和当 $4 < p < \infty$，即 $-\frac{1}{2} + \frac{2}{p} < 0$ 时，有

$$\int_0^T \| \omega \|_{\dot H^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}^p \mathrm{d}s \leqslant CT \cdot (1 + \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| \omega \|_{L^r})^p$$

这里 r 满足 $\frac{1}{2} < r < \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{p})$。因此只需估计 $\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| \omega \|_{L^r}$ 的界。

定理 5　设 $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$，$1 < r < 2$ 且充分靠近 2，$\delta = 3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\right)$，$2 < p < \infty$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{\frac{4}{r}} + \frac{4(r-1)}{r^2} \| \nabla\omega \|_{L^r}^2 \leqslant$$

$$C \| u_3 \|_{\dot H^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}^p \| |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{\frac{4}{r}} + \frac{1}{100} \| |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k^2 u_3 \|_{L^2}^2 \tag{14}$$

证明　这里记 $f(x_1,x_2,x_3) \coloneqq f(x_h,x_3)$，对 $1 \leqslant p,q < \infty$，混合范数可简写为

$$\|f\|_{L_h^pL_v^q} = \| \|f(x_h,x_3)\|_{L_{x_h}^p(\mathbf{R}^2)} \|_{L_{x_3}^q(\mathbf{R})}$$

或

$$\|f\|_{L_v^qL_h^p} = \| \|f(x_h,x_3)\|_{L_{x_3}^q(\mathbf{R})} \|_{L_{x_h}^p(\mathbf{R}^2)}$$

对方程（5）作标准的 L^r 估计，有

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \omega \|_{L^r}^r + \frac{4(r-1)}{r^2} \| \nabla |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^2 =$$

$$\int_{\mathbf{R}^3} \partial_3 u_3 |\omega|^r \mathrm{d}x -$$

$$\int_{\mathbf{R}^3} \nabla_h^{\perp} \cdot u_3 \partial_3 u_h \omega |\omega|^{r-2} \mathrm{d}x \coloneqq \sum_{i=1}^2 D_i \tag{15}$$

先估计 D_1 项。由 Hölder 不等式和插值不等式，当 $2 < p < \infty$ 时，可得

$$|D_1| \leqslant C \| u_3 \|_{L^{\frac{3p}{p-2}}} \| \nabla |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2} \| |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^{\frac{6p}{p+4}}} \leqslant$$

$$C \| u_3 \|_{\dot H^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}} \| |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{\frac{2}{p}} \| \nabla |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{2-\frac{2}{p}} \tag{16}$$

然后估计 D_2 项。注意到式（4），我们有

$$D_2 = \int_{\mathbf{R}^3} \nabla_h^{\perp} \cdot u_3 \nabla_h \Delta_h^{-1} \partial_3^2 u_3 \omega |\omega|^{r-2} \mathrm{d}x -$$

$$\int_{\mathbf{R}^3} \nabla_h^{\perp} \cdot u_3 \nabla_h^{\perp} \Delta_h^{-1} \partial_3 \omega\omega |\omega|^{r-2} \mathrm{d}x \coloneqq D_{21} + D_{22}$$

对于 D_{21} 项，当 $2 < p < 4$，可得

$$|D_{21}| \leqslant C \| |\nabla_h| u_3 \|_{L_h^{\frac{6}{3-\delta}} L_v^{\frac{2pr}{pr+2p-4r}}} \cdot$$

$$\| |\nabla_h|^{-1} \partial_3^2 u_3 \|_{L_h^{\frac{2}{\delta}} L_v^2} \| |\omega|^{r-1} \|_{L_h^{\frac{r}{r-1}} L_v^{\frac{pr}{2r-p}}} \leqslant$$

$$C \| u_3 \|_{\dot H^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}} \| |\nabla_h|^{-\delta} \partial_3^2 u_3 \|_{L^2} \cdot$$

$$\| |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{1-\frac{2}{r}+\frac{2}{p}} \| \nabla |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{1-\frac{2}{p}} \tag{17}$$

和当 $4 \leqslant p < \infty$ 时，有

$$|D_{21}| \leqslant C \| |\nabla_h|^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}-\frac{\delta}{3}} u_3 \|_{L_h^2 L_v^{\frac{6}{3-2\delta}}} \cdot$$

$$(\| |\nabla_h|^{-1} \partial_3^2 u_3 \|_{L_h^{\frac{2}{\delta}} L_v^2} \cdot$$

$$\| |\nabla_h|^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p}+\frac{\delta}{3}} (\omega |\omega|^{r-2}) \|_{L_h^{\frac{2}{1-\delta}} L_v^{\frac{3}{\delta}}} +$$

$$\| |\nabla_h|^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{p}+\frac{\delta}{3}} \partial_3^2 u_3 \|_{L_h^{\frac{12p}{3p-12+8p\delta}} L_v^2} \cdot$$

$$\| |\omega|^{r-1} \|_{L_h^{\frac{12p}{3p+12-8p\delta}} L_v^{\frac{3}{\delta}}}) \leqslant$$

$$C \| u_3 \|_{\dot H^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}} \| |\nabla_h|^{-\delta} \partial_3^2 u_3 \|_{L^2} \cdot$$

$$\| |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{1-\frac{2}{r}+\frac{2}{p}} \| \nabla |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{1-\frac{2}{p}} \tag{18}$$

接着，估计 D_{22} 项。当 $2 < p < 4$ 时，可得

$$|D_{22}| \leqslant C \| |\nabla_h| u_3 \|_{L_h^2 L_v^{\frac{p}{p-2}}} \cdot$$

$$\| |\nabla_h|^{-1} \partial_3 \omega \|_{L_h^{\frac{3}{\delta}} L_v^r} \| |\omega|^{r-1} \|_{L_h^{\frac{r}{r-1}} L_v^{\frac{pr}{2r-p}}} \leqslant$$

$$C \| u_3 \|_{\dot H^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}} \| |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{\frac{2}{p}} \| \nabla |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{2-\frac{2}{p}} \tag{19}$$

和当 $4 \leqslant p < \infty$ 时，有

$$|D_{22}| \leqslant C \| |\nabla_h|^{\frac{2}{p}+\frac{\delta}{3}} u_3 \|_{L_h^2 L_v^{\frac{3}{\delta}}} \cdot$$

$$(\| |\nabla_h|^{-1} \partial_3 \omega \|_{L_h^{\frac{3}{\delta}} L_v^r} \cdot$$

$$\| |\nabla_h|^{1-\frac{2}{p}-\frac{\delta}{3}} (\omega |\omega|^{r-2}) \|_{L_h^{\frac{r}{r-1}} L_v^{\frac{6}{3-4\delta}}} +$$

$$\| |\nabla_h|^{-\frac{2}{p}-\frac{\delta}{3}} \partial_3 \omega \|_{L_h^{\frac{6pr}{6p-6r-pr\delta}} L_v^r} \| |\omega|^{r-1} \|_{L_h^{\frac{6p}{6-p\delta}} L_v^{\frac{6}{3-4\delta}}}) \leqslant$$

$$C \| u_3 \|_{\dot H^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}} \| |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{\frac{2}{p}} \| \nabla |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{2-\frac{2}{p}} \tag{20}$$

由式（17）–（20），可得 D_2 项的界。

最后，将 D_1，D_2 项的界加起来，并对不等式两端乘以 $\| |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{\frac{4}{r}-2}$，定理得证。

2.2　垂直方向项的估计

由定理 4 和定理 5 启发可得，我们仍然需要估计 $\| |\nabla_h|^{-\delta} \nabla u_3 \|_{L^2}$ 和 $\| |\nabla_h|^{-\delta} \nabla\theta \|_{L^2}$ 的界。

定理 6　设 $\delta > 0$ 且 $\delta = 3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\right)$ 为非常小的正常数，$2 < p < \infty$，$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$，则存在正常数 C，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{k=1}^3 (\| |\nabla_h|^{-\delta} \partial_k u_3 \|_{L^2}^2 + \| |\nabla_h|^{-\delta} \partial_k \theta \|_{L^2}^2) \leqslant$$

$$\frac{1}{100} \| \nabla\omega \|_{L^r}^2 + C(1 + \| u_3 \|_{\dot H^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}^p) \cdot$$

$$(\| |\nabla_h|^{-\delta} \partial_k u_3 \|_{L^2}^2 +$$

$$\| |\nabla_h|^{-\delta} \partial_k \theta \|_{L^2}^2 + \| |\omega|^{\frac{r}{2}} \|_{L^2}^{\frac{4}{r}}) \tag{21}$$

证明　对方程组（1）的第一个方程的垂直方

向和第二个方程分别乘以 $|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3$ 和 $|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k\theta$，并作标准的 L^2 估计，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^{3}\left(\||\nabla_h|^{-\delta}\partial_k u_3\|_{L^2}^2+\||\nabla_h|^{-\delta}\partial_k\theta\|_{L^2}^2\right)+\\
&\sum_{k=1}^{3}\left(\||\nabla_h|^{-\delta}\partial_k\nabla u_3\|_{L^2}^2+\||\nabla_h|^{-\delta}\partial_k\nabla\theta\|_{L^2}^2\right)=\\
&\int_{\mathbf{R}^3}\partial_k\theta\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k u\cdot\nabla)u_3\cdot\\
&|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}\partial_3\partial_k\Delta^{-1}\sum_{j=1}^{3}(\partial_j\theta)\cdot\\
&|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}(u\cdot\nabla)\partial_k u_3\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x-\\
&\int_{\mathbf{R}^3}(u\cdot\nabla)\partial_k\theta\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k\theta\mathrm{d}x-\\
&\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k u\cdot\nabla)\theta\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k\theta\mathrm{d}x:=\sum_{i=1}^{6}E_i
\end{aligned}$$

通过观察，可知 E_1,E_3 项和 E_2,E_6 项以及 E_4,E_5 项的结构类似。为了书写简便，我们主要估计 E_2,E_3 和 E_4 项。

首先，估计 E_2 项。将速度场 u 分别沿水平方向和垂直方向分解，可得

$$\int_{\mathbf{R}^3}\partial_k u_3\partial_3 u_3\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$$

和

$$\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k u_h\cdot\nabla_h)u_3\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$$

我们先处理 $\int_{\mathbf{R}^3}\partial_k u_3\partial_3 u_3\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$。当 $2<p<\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbf{R}^3}\partial_k u_3\partial_3 u_3\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x\right|\leqslant\\
&C\||\nabla|^{\frac{1}{2}}u_3\|_{L_h^{\frac{2p}{p-1}}L_v^{\frac{2p}{p-2}}}\Big(\||\nabla|^{\frac{1}{2}}\partial_3 u_3\|_{L_h^{\frac{4}{1+2\delta}}L_v^2}\cdot\\
&\||\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\|_{L_h^{\frac{4p}{p+2-2p\delta}}L_v^p}+\\
&\|\partial_3 u_3\|_{L_h^{\frac{4p}{p+2+2p\delta}}L_v^p}\||\nabla_h|^{-2\delta}|\nabla|^{\frac{1}{2}}\partial_k u_3\|_{L_h^{\frac{4}{1-2\delta}}L_v^2}\Big)\leqslant\\
&C\|u_3\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}\||\nabla_h|^{-\delta}\partial_3 u_3\cdot\\
&\|_{L^2}^{\frac{2}{p}}\||\nabla_h|^{-\delta}\partial_3^2 u_3\|_{L^2}^{2-\frac{2}{p}}
\end{aligned}\tag{22}$$

接着处理 $\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k u_h\cdot\nabla_h)u_3\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$。由式（4）可知，其需分解估计 $\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_h)u_3\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$ 和 $\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}\partial_3 u_3\cdot\nabla_h)u_3\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$。

对于

$$\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_h)u_3\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$$

在水平方向应用 Littlewood-Paley 分解，并用 P_j^v 表示水平方向的投影，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_h)u_3\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x=\\
&\sum_{j=1}\Big[\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}P_j^v\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_h)P_{<j}^v u_3\cdot\\
&|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k P_j^v u_3\mathrm{d}x+ &(23)\\
&\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}P_j^v\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_h)P_j^v u_3\cdot\\
&|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k P_{<j}^v u_3\mathrm{d}x+ &(24)\\
&\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}P_{<j}^v\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_h)P_j^v u_3\cdot\\
&|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k P_j^v u_3\mathrm{d}x+ &(25)\\
&\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}P_j^v\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_h)P_j^v u_3\cdot\\
&|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k P_j^v u_3\mathrm{d}x\Big] &(26)
\end{aligned}$$

当 $2<p<\infty$ 时，有项（23）的估计

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}P_j^v\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_h)P_{<j}^v u_3\cdot\\
&|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k P_j^v u_3\mathrm{d}x\leqslant\\
&C\|2^j\partial_k|\nabla_h|^{-1}P_j^v\boldsymbol{\omega}\|_{L^r l_j^2}\cdot\\
&\|2^{-j}|\nabla_h|P_{<j}^v u_3\|_{L_v^{\frac{3}{\delta}}L_h^{\frac{24}{3+2\delta}}l_j^\infty}\cdot\\
&\||\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k P_j^v u_3\|_{L_v^{\frac{6}{3-4\delta}}L_h^{\frac{24}{9-10\delta}}l_j^2}\leqslant\\
&C\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^r}\|u_3\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}\||\nabla_h|^{-\delta}\partial_k u_3\|_{L^2}^{\frac{2}{p}}\cdot\\
&\||\nabla_h|^{-\delta}\partial_k^2 u_3\|_{L^2}^{1-\frac{2}{p}}
\end{aligned}\tag{27}$$

和项（25）的估计

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}P_{<j}^v\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_h)P_j^v u_3\cdot\\
&|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k P_j^v u_3\mathrm{d}x\leqslant\\
&C\|\partial_k|\nabla_h|^{-1}P_{<j}^v\boldsymbol{\omega}\|_{L_v^r L_h^{\frac{3}{\delta}}l_j^\infty}\cdot\\
&\|2^{\frac{-3-10\delta}{12}j}|\nabla_h|P_j^v u_3\|_{L_v^{\frac{3}{\delta}}L_h^{\frac{r}{r-1}}l_j^2}\cdot\\
&\|2^{\frac{3+10\delta}{12}j}|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k P_j^v u_3\|_{L_v^{\frac{6}{3-4\delta}}L_h^2 l_j^2}\leqslant\\
&C\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^r}\|u_3\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}\cdot\\
&\||\nabla_h|^{-\delta}\partial_k u_3\|_{L^2}^{\frac{2}{p}}\||\nabla_h|^{-\delta}\partial_k^2 u_3\|_{L^2}^{1-\frac{2}{p}}
\end{aligned}\tag{28}$$

剩下的项（24），项（26）的界可类似式（27），式（28）处理。

对

$$\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}\partial_3 u_3\cdot\nabla_h)u_3\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$$

作水平方向的 Littlewood-Paley 分解，同上可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}\partial_3 u_3\cdot\nabla_h)u_3\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x\leqslant\\
&C\|u_3\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}\||\nabla_h|^{-\delta}\partial_k u_3\|_{L^2}^{\frac{2}{p}}\cdot
\end{aligned}$$

$$\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k^2 u_3\Vert_{L^2}^{2-\frac{2}{p}} \tag{29}$$

由式（22）–（29），可得 E_2 项的界。

然后，估计 E_6 项。我们只估计和 E_2 项不同的部分：$\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k u_h\cdot\nabla_h)\theta\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k\theta\mathrm{d}x$。当 $2<p<\infty$ 时，并注意到式（4），有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}\partial_3 u_3\cdot\nabla_h)\theta\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k\theta\mathrm{d}x\right|\leqslant C\Vert |\nabla_h|^{1-\delta}\theta\Vert_{L_h^2 L_v^{\frac{2}{1-2\delta}}}\cdot\\
&(\Vert |\nabla_h|^{-1+\delta}\partial_3\partial_k u_3\Vert_{L_h^{\frac{1}{\delta}}L_v^2}\Vert |\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k\theta\Vert_{L_h^{\frac{2}{1-2\delta}}L_v^{\frac{1}{\delta}}}+\\
&\Vert |\nabla_h|^{-1}\partial_3\partial_k u_3\Vert_{L_h^{\frac{2}{\delta}}L_v^2}\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k\theta\Vert_{L_h^{\frac{2}{1-\delta}}L_v^{\frac{1}{\delta}}})\leqslant\\
&C\Vert\nabla\theta\Vert_{L^2}\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k^2 u_3\Vert_{L^2}\Vert |\nabla|^{\frac{3}{2}-\delta}\theta\Vert_{L^2}\leqslant\\
&C\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k^2 u_3\Vert_{L^2}\Vert\theta\Vert_{L^\infty}\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k\theta\Vert_{L^2}
\end{aligned} \tag{30}$$

和 $\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}\omega\cdot\nabla_h)\theta\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k\theta\mathrm{d}x$，其同上可得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_k|\nabla_h|^{-1}\omega\cdot\nabla_h)\theta\cdot|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k\theta\mathrm{d}x\right|\leqslant\\
&C\Vert\nabla\omega\Vert_{L^r}\Vert\theta\Vert_{L^\infty}\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k\theta\Vert_{L^2}
\end{aligned} \tag{31}$$

接下来，估计 E_3 项。由于 $\partial_3\partial_k\Delta^{-1}\theta=\mathscr{R}_3(\theta)$，其中 $\mathscr{R}_3$ 是三维 Riesz 算子，对 E_3 分部积分，有

$$\begin{aligned}
|E_3|&\leqslant C\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k\theta\Vert_{L^2}\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k u_3\Vert_{L^2}\leqslant\\
&C(\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k\theta\Vert_{L^2}^2+\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k u_3\Vert_{L^2}^2)
\end{aligned} \tag{32}$$

类似地，E_1 项可同 E_3 项一样估计，此处略。

进一步，估计 E_4 项。分部积分可得 $E_4=-\int_{\mathbf{R}^3}u\partial_k u_3\cdot\nabla|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$，将速度场 u 分别沿水平方向和垂直方向分解，有 $\int_{\mathbf{R}^3}u_3\partial_k u_3\partial_3|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$ 和 $\int_{\mathbf{R}^3}u_h\partial_k u_3\cdot\nabla_h|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$。我们先处理 $\int_{\mathbf{R}^3}u_3\partial_k u_3\partial_3|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$。当 $2<p<\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbf{R}^3}u_3\partial_k u_3\partial_3|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x\right|\leqslant\\
&C\Vert u_3\Vert_{L_h^{\frac{6p}{3p-6-2p\delta}}L_v^{\frac{3}{2\delta}}}\Vert\partial_k u_3\Vert_{L_h^{\frac{6p}{6+5p\delta}}L_v^{\frac{6}{3-4\delta}}}\cdot\\
&\Vert |\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k^2 u_3\Vert_{L_h^{\frac{2}{1-\delta}}L_v^2}\leqslant\\
&C\Vert u_3\Vert_{\dot H^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k u_3\Vert_{L^2}^{\frac{2}{p}}\cdot\\
&\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k^2 u_3\Vert_{L^2}^{2-\frac{2}{p}}
\end{aligned} \tag{33}$$

接着，我们处理 $\int_{\mathbf{R}^3}u_h\partial_k u_3\cdot\nabla_h|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x$，由 Kato-Ponce 的交换子估计[21]，有

$$\begin{aligned}
&2\int_{\mathbf{R}^3}u_h\partial_k u_3\cdot\nabla_h|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\mathrm{d}x=-\\
&\int_{\mathbf{R}^3}\nabla_h|\nabla_h|^{-2\delta}\cdot(u_h\partial_k u_3)\partial_k u_3\mathrm{d}x+\\
&\int_{\mathbf{R}^3}u_h\cdot\nabla_h|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_k u_3\partial_k u_3\mathrm{d}x\leqslant\\
&\left|\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla_h|^{1-2\delta}u_h\partial_k u_3\partial_k u_3\mathrm{d}x\right|
\end{aligned}$$

当 $2<p<\infty$ 时，注意到式（4），它可分解为以下两种情况：

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla_h|^{-2\delta}\omega\partial_k u_3\partial_k u_3\mathrm{d}x\right|\leqslant\\
&\Vert |\nabla_h|^{-2\delta}\omega\Vert_{L_h^{\frac{3p}{3+p\delta}}L_v^{\frac{6}{3-10\delta}}}\Vert\partial_k u_3\Vert^2_{L_h^{\frac{6p}{3p-3-p\delta}}L_v^{\frac{12}{3+10\delta}}}\leqslant\\
&\Vert\omega\Vert_{L^r}^{\frac{2}{p}}\Vert\nabla\omega\Vert_{L^r}^{1-\frac{2}{p}}\Vert u_3\Vert_{\dot H^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k^2 u_3\Vert_{L^2}
\end{aligned} \tag{34}$$

和

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla_h|^{-2\delta}\partial_3 u_3\partial_k u_3\partial_k u_3\mathrm{d}x\right|\leqslant\\
&\Vert |\nabla_h|^{-2\delta}|\nabla|^{\frac{1}{2}}u_3\Vert_{L_h^{\frac{2p}{p-1-p\delta}}L_v^{\frac{2p}{p-2-2p\delta}}}\cdot\\
&\Vert |\nabla|^{\frac{1}{2}}\partial_k u_3\Vert_{L_h^{\frac{4}{1+2\delta}}L_v^2}\Vert\partial_k u_3\Vert_{L_h^{\frac{4p}{p+2}}L_v^{\frac{p}{1+p\delta}}}\leqslant\\
&\Vert u_3\Vert_{\dot H^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k u_3\Vert_{L^2}^{\frac{2}{p}}\cdot\\
&\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k^2 u_3\Vert_{L^2}^{2-\frac{2}{p}}
\end{aligned} \tag{35}$$

由式（33）–（35），可得 E_4 项的界。

最后，估计 E_5 项。这里只估计与项不同的部分：$\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla_h|^{-2\delta}\omega\partial_k\theta\partial_k\theta\mathrm{d}x$。

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla_h|^{-2\delta}\omega\partial_k\theta\partial_k\theta\mathrm{d}x\right|\leqslant\\
&C\Vert |\nabla_h|^{-2\delta}\omega\Vert_{L_h^{\frac{6}{3-4\delta}}L_v^r}\Vert\partial_k\theta\Vert^2_{L_h^{\frac{12}{3+4\delta}}L_v^{\frac{2r}{r-1}}}\leqslant\\
&C\Vert\omega\Vert_{L^r}\Vert |\nabla|^{\frac{7}{4}-\frac{\delta}{2}}\theta\Vert_{L^2}^2\leqslant\\
&C\Vert\omega\Vert_{L^r}\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k^2\theta\Vert_{L^2}\Vert\theta\Vert_{L^\infty}
\end{aligned} \tag{36}$$

综上将 E_1 项至 E_6 项的界加起来，使用 Young 不等式，该定理得证。

2.3　定理 1 的证明

证明　将定理 5 的不等式（14）和定理 6 的不等式（21）相加，利用 Gronwall 不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{3}(\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k u_3\Vert_{L^2}^2+\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k\theta\Vert_{L^2}^2)+\\
&\Vert |\omega|^{\frac{r}{2}}\Vert_{L^2}^{\frac{4}{r}}\leqslant\\
&(\sum_{k=1}^{3}(\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k u_3(0)\Vert_{L^2}^2+\\
&\Vert |\nabla_h|^{-\delta}\partial_k\theta(0)\Vert_{L^2}^2)+\\
&\Vert |\omega(0)|^{\frac{r}{2}}\Vert_{L^2}^{\frac{4}{r}})\cdot\exp\{C(1+\int_0^T\Vert u_3\Vert^p_{\dot H^{\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}}\mathrm{d}s)\}
\end{aligned}$$

主要定理得证。

参考文献：

[1] GUI G, HUANG J, ZHANG P. Large global solutions to the 3D inhomogeneous Navier Stokes equations [J]. J Funct Anal, 2011, 261: 3181 -3210.

[2] CHEMIN J Y, GALLAGHER I. On the global wellposedness of the 3D Navier Stokes equations with large data [J]. Ann Sci Ecole Norm sup, 2006, 39(4) : 679 -698.

[3] 李率杰，李鹏，冯兆永，姚正安. 基于 Navier-Stokes 方程的图像修复算法[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2012，51(1)：9 -13.

LI S J, LI P, FENG Z Y, YAO Z A. A new algorithm for image inpainting based on the Navier-Stokes equations [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universities Sunyatseni, 2012, 51(1): 9 -13.

[4] 邹杨，冯兆永，姚正安. Navier-Stokes 方程在图像放大中的应用[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2015，54(1)：1 -9.

ZOU Y, FENG Z Y, YAO Z A. Application of Navier-Stokes equation in image zooming [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universities Sunyatseni, 2015, 54(1): 1 -9.

[5] ESCAURIAZA L, SEREGIN G, SVERAK V. L3,∞ -solutions to the Navier-Stokes equations and backward uniqueness [J]. Russian Math Surveys, 2003, 58: 211 -250.

[6] CHEMIN J Y, ZHANG P. On the critical one component regularity for 3D Navier-Stokes system [J]. Ann Sci Ec Norm Super, 2016, 49: 131 -167.

[7] CHEMIN J Y, ZHANG P, ZHANG Z. On the critical one component regularity for 3D Navier-Stokes system: general case [J]. Arch Ration Mech Ana, 2017, 224(3): 871 -905.

[8] HAN B, LEI Z, LI D, et al. Sharp one component regularity for Navier-Stokes [J]. Arch Rational Mech Anal, 2019, 231(2): 939 -970.

[9] CHAE D. Global regularity for the 2D Boussinesq equations with partial viscosity terms [J]. Adv Math, 2006, 203(2): 497 -513.

[10] CORDOBA D, FEFFERMAN C, RAFAEL D L L. On squirt singularities in hydrodynamics [J]. SIAM J Math Anal, 2004, 36(1): 204 -213.

[11] HMIDI T, KERAANI S. Global well-posedness result for two-dimensional Boussinesq system with a zero diffusivity [J]. Adv Diff Eqn, 2007, 12(4): 461 -480.

[12] XU X. Global regularity of solutions of 2D Boussinesq equations with fractional diffusion [J]. Nonlinear Anal, 2010, 72(2): 677 -681.

[13] CHAE D, NAM H. Local existence and blow-up criterion for the Boussinesq equations [J]. Proc Roy Soc Edinburgh A, 1997, 127(5): 935 -946.

[14] CHAE D, KIM S-K, NAM H-S. Local existence and blow-up criterion of Holder continuous solutions of the Boussinesq equations [J]. Nagoya Math J, 1999, 155: 55 -80.

[15] GUO B. Spectral method for solving two-dimensional Newton- Boussinesq equation [J]. Acta Math Appl Sin, 1989, 5: 201 -218.

[16] FAN J, ZHOU Y. A note on regularity criterion for the 3D Boussinesq system with partial viscosity [J]. Appl Math Lett, 2009, 22: 802 -805.

[17] ISHIMURA N, MORIMOTO H. Remarks on the blow-up criterion for the 3D Boussinesq equations [J]. Math Models Methods Appl Sci, 1999, 9: 1323 -1332.

[18] QIU H, DU Y, YAO Z A. Serrin-type blow-up criteria for three-dimensional Boussinesq equations [J]. Appl Anal, 2010, 89(10): 1603 -1613.

[19] QIU H, DU Y, YAO Z A. Local existence and blow-up criterion for the generalied Boussinesq equations in Besov spaces [J]. Mat. Methods Appl Sci, 2013, 36: 86 -98.

[20] 邱华，姚正安. 广义 Boussinesq 方程的正则性准则[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2013，52(2)：43 -46.

QIU H, YAO Z A. Regularity criteria for the generalized Boussinesq equations [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universities Sunyatseni, 2013, 52(2): 43 -46.

[21] LI D. On Kato-Ponce and fractional Leibniz [J]. Rev Mat Iberoam, 2016, DOI: 10.4171/rmi/1049.